

## Exercícios selecionados

1(a, c), 3, 5(a, c, e, f, g, i, j, k, o, p, r), 6(a, c, d, f, k), 7(b, e, g, j, k), 8(a, d, e, f), 9(a, b, c, d, g, j), 10, 11, 12

## Problemas Propostos

- Determinar uma equação das superfícies esféricas nas condições dadas.
  - Centro  $C(2, -3, 1)$  e raio 4.
  - Centro  $C(4, -1, -2)$  e passando por  $P(2, 3, -1)$ .
  - O segmento de extremos  $A(-1, 3, -5)$  e  $B(5, -1, -3)$  é um de seus diâmetros.
  - Centro  $C(-2, 3, 4)$  e tangente ao eixo  $Oz$ .
  - Centro  $C(0, -4, 3)$  e tangente ao plano  $\pi: x + 2y - 2z - 2 = 0$
- Determinar uma equação da superfície esférica de centro  $C(2, -3, 4)$  e
  - tangente ao plano  $xOy$
  - tangente ao plano  $xOz$
  - tangente ao plano  $yOz$
- Obter uma equação geral do plano tangente à superfície esférica  $E$  no ponto  $P$ .
  - $E: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $P(2, 1, -2)$
  - $E: (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 12$ ,  $P(1, -3, 4)$
  - $E: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z - 11 = 0$ ,  $P(2, -5, 6)$
- Obter uma equação da superfície gerada pela rotação de cada uma das curvas dadas em torno do eixo indicado.
 

|                                                                 |                                        |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------|
| a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ , $z = 0$ ; eixo maior. | f) $y = 4x^2$ , $z = 0$ ; eixo $Oy$ .  |
| b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ , $z = 0$ ; eixo menor. | g) $z = -2y^2$ , $x = 0$ ; eixo $Oz$ . |
| c) $x^2 + y^2 = 9$ , $z = 0$ ; eixo $Ox$ .                      | h) $z = 2y$ , $x = 0$ ; eixo $Oz$ .    |
| d) $\frac{z^2}{4} - y^2 = 1$ , $x = 0$ ; eixo $Oy$ .            | i) $z = 2y$ , $x = 0$ ; eixo $Oy$ .    |
| e) $\frac{z^2}{4} - y^2 = 1$ , $x = 0$ ; eixo $Oz$ .            | j) $y = x$ , $z = 0$ ; eixo $Oy$ .     |

- Reduzir cada uma das equações à forma canônica (caso não esteja), identificar a superfície e construir seu gráfico.
 

|                                     |                                        |
|-------------------------------------|----------------------------------------|
| a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$           | l) $36x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 0$           |
| b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$     | m) $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$             |
| c) $36x^2 + 16y^2 + 9z^2 - 144 = 0$ | n) $z = x^2 + y^2$                     |
| d) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 - 144 = 0$ | o) $z = 2 + x^2 + y^2$                 |
| e) $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 4 = 0$      | p) $z = -x^2 - y^2$                    |
| f) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$          | q) $z = 6 - x^2 - y^2$                 |
| g) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$      | r) $y = -2 + x^2 + z^2$                |
| h) $4x^2 + z^2 - y = 0$             | s) $x^2 + y^2 = 9$                     |
| i) $9x^2 + 4y^2 + 9z = 0$           | t) $x^2 + z = 0$                       |
| j) $y^2 + 4z^2 - x = 0$             | u) $z = 4 - x^2$                       |
| k) $z = y^2 - x^2$                  | v) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ |
- Identificar e representar graficamente as superfícies expressas pelas equações nos intervalos dados.
 

|                                                              |                                                        |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| a) $x^2 + \frac{y^2}{4} = -\frac{z}{3}$ , $-3 \leq z \leq 0$ | h) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ , $-4 \leq y \leq 4$          |
| b) $3x^2 - y^2 + 2z^2 = 0$ , $-6 \leq y \leq 6$              | i) $x = -4 + \frac{y^2}{2} + z^2$ , $-4 \leq x \leq 5$ |
| c) $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ , $-3 \leq z \leq 3$                | j) $z = 4 - 2x^2 - y^2$ , $0 \leq z \leq 4$            |
| d) $z^2 = x^2 + y^2 - 1$ , $-3 \leq z \leq 3$                | k) $y^2 + 4z^2 = x$ , $0 \leq x \leq 4$                |
| e) $y = -2 + x^2 + \frac{z^2}{2}$ , $-2 \leq y \leq 2$       | l) $y^2 + 4z^2 - 4 = 0$ , $-4 \leq x \leq 6$           |
| f) $y = 6 - x^2 - z^2$ , $-3 \leq y \leq 6$                  | m) $y^2 - x^2 = 16$ , $0 \leq z \leq 4$                |
| g) $x^2 = 2z$ , $-3 \leq y \leq 5$                           | n) $z = 9 - y^2$ , $-4 \leq x \leq 4$                  |
- Identificar as superfícies definidas pelas equações, dizendo ao longo de que eixo elas ocorrem, conforme o caso.
 

|                                       |                                 |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| a) $25x^2 + 100y^2 + 36z^2 - 900 = 0$ | c) $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$ |
| b) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$         | d) $y = \sqrt{16x^2 + 4z^2}$    |

- e)  $z^2 = x^2 + y^2$  i)  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$   
 f)  $12x^2 + 4y^2 - 3z^2 + 12 = 0$  j)  $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$   
 g)  $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$  k)  $x^2 + z - 9 = 0$   
 h)  $z = \sqrt{4 + 4x^2 + 4y^2}$  l)  $x - y = 0$
- 8) Identificar a superfície  $S$  e a sua interseção com o plano  $\pi$  dado. Representar graficamente esta interseção no plano  $\pi$ .
- a)  $S: y^2 - 4z^2 - 2x = 0$  e  $\pi: x - 2 = 0$   
 b)  $S: 4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$  e  $\pi: z = 4$   
 c)  $S: z = -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$  e  $\pi: z = 1$   
 d)  $S: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{16} = 1$  e  $\pi: x = 2$   
 e)  $S: x^2 + y + z^2 = 0$  e  $\pi: y + 4 = 0$   
 f)  $S: 18x^2 + 9y^2 - 2z^2 - 18 = 0$  e  $\pi: z = 3$
- 9) Identificar e descrever as superfícies de equações dadas.
- a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 9 = 0$   
 b)  $x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 4z + 28 = 0$   
 c)  $4x^2 - 2y^2 + z^2 - 24x - 4y + 8z + 42 = 0$   
 d)  $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 2y + 5 = 0$   
 e)  $x^2 + y^2 - 2y = 0$   
 f)  $y^2 - 4z^2 - 4x - 6y - 24z - 31 = 0$   
 g)  $6x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 24x - 6y - 12z + 39 = 0$   
 h)  $x^2 - 4x - z + 6 = 0$   
 i)  $2x^2 - 6y^2 - 3z^2 - 24y + 6z - 27 = 0$   
 j)  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - z + 12 = 0$
- 10) O traço de um elipsóide (centro na origem) no plano  $xy$  é a elipse  $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0$ .  
 Determinar a equação do elipsóide, sabendo que contém o ponto  $(0, 1, \sqrt{6})$ .

- 11) Deduzir uma equação do parabolóide de vértice na origem, sabendo que sua interseção com o plano  $z = 4$  é a circunferência de centro  $(0, 0, 4)$  e raio 3.  
 12) Determinar os vértices e os focos da elipse  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} - \frac{z^2}{9} = 1, z = 3$ .

### Respostas de Problemas Propostos

- 1) a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z - 2 = 0$   
 b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 2y + 4z = 0$   
 c)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 7 = 0$   
 d)  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 8z + 16 = 0$   
 e)  $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 72y - 54z - 31 = 0$
- 2) a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 13 = 0$   
 b)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 20 = 0$   
 c)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 8z + 25 = 0$
- 3) a)  $2x + y - 2z - 9 = 0$   
 b)  $x + y - z + 6 = 0$   
 c)  $4y - 3z + 38 = 0$
- 4) a)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{4} = 1$  f)  $y = 4x^2 + 4z^2$   
 b)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$  g)  $z = -2x^2 - 2y^2$   
 c)  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  h)  $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0$   
 d)  $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$  i)  $\frac{x^2}{4} - y^2 + \frac{z^2}{4} = 0$   
 e)  $\frac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 1$  j)  $x^2 - y^2 + z^2 = 0$
- 5) a)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} = 1$ , superfície esférica de raio 5  
 b)  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ , elipsóide

- c)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$ , elipsóide
- d)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$ , hiperbolóide de uma folha
- e)  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$ , hiperbolóide de uma folha
- f)  $-x^2 - y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ , hiperbolóide de duas folhas
- g)  $-x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 1$ , hiperbolóide de duas folhas
- h)  $y = \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + z^2$ , parabolóide elíptico
- i)  $z = -x^2 - \frac{y^2}{\frac{2}{4}}$ , parabolóide elíptico
- j)  $x = y^2 + \frac{z^2}{\frac{1}{4}}$ , parabolóide elíptico
- k) parabolóide hiperbólico
- l)  $y^2 = \frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{z^2}{\frac{4}{9}}$ , superfície cônica
- m)  $z^2 = \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}}$ , superfície cônica
- n) parabolóide circular
- o) parabolóide circular
- p) parabolóide circular
- q) parabolóide circular
- r) parabolóide circular
- s) superfície cilíndrica circular
- t) superfície cilíndrica parabólica
- u) superfície cilíndrica parabólica
- v) superfície cilíndrica hiperbólica

- 6) a) parabolóide elíptico  
b) superfície cônica  
c) hiperbolóide de duas folhas  
d) hiperbolóide de uma folha  
e) parabolóide elíptico  
f) parabolóide circular  
g) superfície cilíndrica parabólica  
h) superfície cônica circular  
i) parabolóide elíptico  
j) parabolóide elíptico  
k) parabolóide elíptico  
l) superfície cilíndrica elíptica  
m) superfície cilíndrica hiperbólica  
n) superfície cilíndrica parabólica
- 7) a) elipsóide  
b) semi-superfície esférica superior de raio 3  
c) semi-superfície esférica inferior de raio 4  
d) semi-superfície cônica ao longo de Oy  
e) superfície cônica circular ao longo de Oz  
f) hiperbolóide de duas folhas ao longo de Oz  
g) semi-hiperbolóide de uma folha ao longo de Oz  
h) semi-hiperbolóide de duas folhas ao longo de Oz  
i) semi-superfície cônica inferior ao longo de Oz  
j) semi-superfície cônica ao longo de Oz  
k) superfície cilíndrica parabólica ao longo de Oy  
l) plano que contém o eixo Oz
- 8) a) parabolóide hiperbólico e hipérbole  
b) superfície cônica e circunferência  
c) parabolóide hiperbólico e hipérbole  
d) hiperbolóide de duas folhas e ponto (2, 0, 0)  
e) parabolóide elíptico e circunferência  
f) hiperbolóide de uma folha e elipse
- 9) a) superfície esférica, centro (3, -2, 0) e raio 2  
b) parabolóide elíptico, vértice (-4, 1, 2), eixo paralelo a Oz  
c) hiperbolóide de uma folha, centro (3, -1, -4), eixo paralelo a Oy  
d) hiperbolóide de duas folhas, centro (0, -1, 0), eixo paralelo a Oz  
e) superfície cilíndrica circular, geratriz paralela a Oz  
f) parabolóide hiperbólico, centro (-1, 3, -3), ao longo de Ox  
g) elipsóide, centro (-2, 1, 3), eixo maior paralelo a Oz  
h) superfície cilíndrica parabólica, geratriz paralela a Oy  
i) superfície cônica, vértice (0, -2, 1), eixo paralelo a Ox  
j) parabolóide circular, vértice (2, 3, -1), eixo paralelo a Oz
- 10)  $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1$
- 11)  $4x^2 + 4y^2 - 9z = 0$
- 12) vértices: (0, ±4, 3) e (±2, 0, 3), focos: (0, ±2√3, 3).