Exercícios selecionados:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15

Propriedades:

i) Em geral $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (podendo mesmo um dos membros estar definido e o outro não).

Exemplo:

Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} \doteq \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Então $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

Note, ainda, que $\mathbf{AB} = 0$, sem que $\mathbf{A} = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$.
Desde que sejam possíveis as operações, as seguintes propriedades são válidas:

ii) $\mathbf{AI} = \mathbf{IA} = \mathbf{A}$ (Isto justifica o nome da matriz identidade.)
iii) $\mathbf{A(B + C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$ (distributividade à esquerda da multiplicação, em relação à soma)
iv) $\mathbf{(A + B)C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$ (distributividade à direita da multiplicação, em relação à soma)
v) $\mathbf{(AB)C} = \mathbf{A(BC)}$ (associatividade)
vi) $\mathbf{(AB)}' = \mathbf{B}'\mathbf{A}'$ (Observe a ordem!)
vii) $\mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

1.4 EXERCÍCIOS

1. Sejam

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = [2 \quad -1]$$

Encontre:

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$
b) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$
c) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$
d) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$
e) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$
f) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$
g) $-\mathbf{A}$
h) $-\mathbf{D}$

2. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & x^2 \\ 2x-1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, então x = ________.

3. Se **A** é uma matriz simétrica, então $\mathbf{A} - \mathbf{A}'$ = __________.

4. Se **A** é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}'$ é ____________.

5. Se **A** é uma matriz diagonal, então $\mathbf{A}'$ = __________.

6. Verdadeiro ou falso?
   a) $(-\mathbf{A})' = -(\mathbf{A}')$
   b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})' = \mathbf{B}' + \mathbf{A}'$
   c) Se $\mathbf{AB} = 0$, então $\mathbf{A} = 0$ ou $\mathbf{B} = 0$.
   d) $(k_1\mathbf{A})(k_2\mathbf{B}) = (k_1k_2)\mathbf{AB}$
   e) $(-\mathbf{A})(-\mathbf{B}) = -(\mathbf{AB})$
   f) Se **A** e **B** são matrizes simétricas, então $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
   g) Se $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$, então $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 0$.
   h) Se podemos efetuar o produto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, então **A** é uma matriz quadrada.

7. Se $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, então $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^2$ = ____________.

8. Se **A** é uma matriz triangular superior, então $\mathbf{A}^2$ é __________.

9 Achе x, y, z, w se $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

    mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$.

11. Suponha que $\mathbf{A} \neq 0$ e $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ onde **A**, **B**, **C** são matrizes tais que a multiplicação esteja definida.
    a) $\mathbf{B} = \mathbf{C}$?
    b) Se existir uma matriz **Y**, tal que $\mathbf{YA} = \mathbf{I}$, onde **I** é a matriz identidade, então $\mathbf{B} = \mathbf{C}$?

12. Explique por que, em geral, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ e $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

13. Dadas $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$,

    a) Mostre que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = 0$, $\mathbf{AC} = \mathbf{A}$ e $\mathbf{CA} = \mathbf{C}$.
    b) Use os resultados de (*a*) para mostrar que $\mathbf{ACB} = \mathbf{CBA}$, $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} - \mathbf{B})(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ e $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2$.

14. Se $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$, ache **B**, de modo que $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.

15. Um construtor tem contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, mediterrâneo e colonial. A quantidade de material empregada em cada tipo de casa é dada pela matriz:

	Ferro	Madeira	Vidro	Tinta	Tijolo
Moderno	5	20	16	7	17
Mediterrâneo	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

(Qualquer semelhança dos números com a realidade é mera coincidência.)

a) Se ele vai construir 5, 7 e 12 casas dos tipos moderno, mediterrâneo e colonial, respectivamente, quantas unidades de cada material serão empregadas?
b) Suponha agora que os preços por unidade de ferro, madeira, vidro, tinta e tijolo sejam, respectivamente, 15, 8, 5, 1 e 10 u.c.p. Qual é o preço unitário de cada tipo de casa?
c) Qual o custo total do material empregado?

16. Uma rede de comunicação tem cinco locais com transmissores de potências distintas. Estabelecemos que $a_{ij} = 1$, na matriz abaixo, significa que a estação i pode transmitir diretamente à estação j, $a_{ij} = 0$ significa que a transmissão da estação i não alcança a estação j. Observe que a diagonal principal é nula significando que uma estação não transmite diretamente para si mesma.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Qual seria o significado da matriz $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$?

Seja $\mathbf{A}^2 = [c_{ij}]$. Calculemos o elemento $c_{42} = \sum_{k=1}^{5} a_{4k}a_{k2} = 0+0+1+0+0 = 1$.

Note que a única parcela não nula veio de $a_{43} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1$. Isto significa que a estação 4 transmite para a estação 2 através de uma retransmissão pela estação 3, embora não exista uma transmissão direta de 4 para 2.

1.7 RESPOSTAS

1.7.1 Respostas de 1.4

2. $x = 1$
4. Triangular inferior
6. *a*) V; *b*) V; *c*) F; *d*) V; *e*) F; *f*) F; *g*) F; *h*) V
8. Triangular superior
12. Porque em geral o produto de matrizes não é comutativo.
15. *a*) $[146 \ 526 \ 260 \ 158 \ 388]$

b) $\begin{bmatrix} 492 \\ 528 \\ 465 \end{bmatrix}$

c) Cr$ 11.736,00

16. *a*) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0{,}59 & 0{,}28 & 0{,}13 \\ 0{,}44 & 0{,}39 & 0{,}17 \\ 0{,}48 & 0{,}36 & 0{,}16 \end{bmatrix}$