Exercícios selecionados:
1, 2, 4, 5, 6, 7, 13, 16

Conjunto de Exercícios 1.2

1. Quais das seguintes matrizes 3×3 estão em forma escalonada reduzida por linhas?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Quais das seguintes matrizes 3×3 estão em forma escalonada?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. Em cada parte, determine se a matriz está em forma escalonada, escalonada reduzida por linhas, ambas ou nenhuma das duas.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada reduzida por linhas dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Em cada parte, suponha que a matriz aumentada de um sistema de equações lineares foi reduzida por operações sobre linhas à forma escalonada dada. Resolva o sistema.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \qquad\qquad - 3w &= -3 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} - 2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned}$

7. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 6 por eliminação gaussiana.

8. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 10y - 4z + w &= 1 \\ x + 4y - z + w &= 2 \\ 3x + 2y + z + 2w &= 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w &= -4 \\ x - 6y + 3z \qquad &= 1 \end{aligned}$

9. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 8 por eliminação gaussiana.

10. Resolva cada um dos seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan.

(a) $\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 &= 5 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} w + 2x - y &= 4 \\ x - y &= 3 \\ w + 3x - 2y &= 7 \\ 2u + 4v + w + 7x \qquad &= 7 \end{aligned}$

11. Resolva cada um dos sistemas do Exercício 10 por eliminação gaussiana.

12. Sem utilizar papel e lápis, determine quais dos seguintes sistemas homogêneos têm soluções não-triviais.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + 9x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0 \\ x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

13. Reolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} 2x + 2y + 4z &= 0 \\ w - y - 3z &= 0 \\ 2w + 3x + y + z &= 0 \\ -2w + x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$

14. Resolva os seguintes sistemas homogêneos de equações lineares por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 0 \\ -x + 2y - 3z &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

15. Resolva os seguintes sistemas por qualquer método.

(a) $\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + 3I_3 + 4I_4 &= 9 \\ I_1 - 2I_3 + 7I_4 &= 11 \\ 3I_1 - 3I_2 + I_3 + 5I_4 &= 8 \\ 2I_1 + I_2 + 4I_3 + 4I_4 &= 10 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} Z_3 + Z_4 + Z_5 &= 0 \\ -Z_1 - Z_2 + 2Z_3 - 3Z_4 + Z_5 &= 0 \\ Z_1 + Z_2 - 2Z_3 - Z_5 &= 0 \\ 2Z_1 + 2Z_2 - Z_3 + Z_5 &= 0 \end{aligned}$

16. Resolva os seguintes sistemas, onde a, b e c são constantes.

(a) $\begin{aligned} 2x + y &= a \\ 3x + 6y &= b \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= a \\ 2x_1 + 2x_3 &= b \\ 3x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned}$

17. O sistema seguinte não tem soluções para quais valores de a? Exatamente uma solução? Infinitas soluções?

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

18. Reduza

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -29 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

à forma escalonada reduzida por linhas sem introduzir quaisquer frações.

19. Obtenha duas formas escalonadas por linha diferentes de

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$$

20. Resolva o seguinte sistema de equações não-lineares para os ângulos incógnitos α, β e γ, onde $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma < \pi$.

$$\begin{aligned} 2\,\text{sen}\,\alpha - \cos\beta + 3\,\text{tg}\,\gamma &= 3 \\ 4\,\text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta - 2\,\text{tg}\,\gamma &= 2 \\ 6\,\text{sen}\,\alpha - 3\cos\beta + \text{tg}\,\gamma &= 9 \end{aligned}$$

21. Mostre que o seguinte sistema não-linear tem 18 soluções se $0 \le \alpha \le 2\pi$, $0 \le \beta \le 2\pi$ e $0 \le \gamma < 2\pi$.

$$\begin{aligned} \text{sen}\,\alpha + 2\cos\beta + 3\,\text{tg}\,\gamma &= 0 \\ 2\,\text{sen}\,\alpha + 5\cos\beta + 3\,\text{tg}\,\gamma &= 0 \\ -\,\text{sen}\,\alpha - 5\cos\beta + 5\,\text{tg}\,\gamma &= 0 \end{aligned}$$

22. Para que valor(es) de λ o sistema de equações

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 3)y &= 0 \end{aligned}$$

tem soluções não-triviais?

Respostas dos Exercícios

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS 1.2 [página 37]

1. (a), (b), (c), (d), (h), (i), (j)

2. (a), (b), (d), (e)

3. **(a)** Ambas **(b)** Nenhuma **(c)** Ambas
(d) Escalonada por linhas **(e)** Nenhuma **(f)** Ambas

4. **(a)** $x_1 = -3, x_2 = 0, x_3 = 7$
(b) $x_1 = 7t + 8, x_2 = -3t + 2, x_3 = -t - 5, x_4 = t$
(c) $x_1 = 6s - 3t - 2, x_2 = s, x_3 = -4t + 7, x_4 = -5t + 8, x_5 = t$
(d) Inconsistente

5. **(a)** $x_1 = -37, x_2 = -8, x_3 = 5$
(b) $x_1 = 13t - 10, x_2 = 13t - 5, x_3 = -t + 2, x_4 = t$
(c) $x_1 = -7s + 2t - 11, x_2 = s, x_3 = -3t - 4, x_4 = -3t + 9, x_5 = t$
(d) Inconsistente

6. **(a)** $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$
(b) $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}t, x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}t, x_3 = t$
(c) $x = t - 1, y = 2s, z = s, w = t$
(d) Inconsistente

8. **(a)** Inconsistente
(b) $x_1 = -4, x_2 = 2, x_3 = 7$
(c) $x_1 = 3 + 2t, x_2 = t$
(d) $x = \frac{8}{5} - \frac{3}{5}t - \frac{3}{5}s, y = \frac{1}{10} + \frac{2}{5}t - \frac{1}{10}s, z = t, w = s$

10. **(a)** $x_1 = 2 - 12t, x_2 = 5 - 27t, x_3 = t$
(b) Inconsistente
(c) $u = -2s - 3t - 6, v = s, w = -t - 2, x = t + 3, y = t$

12. (a), (c), (d)

13. **(a)** $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
(b) $x_1 = -s, x_2 = -t - s, x_3 = 4s, x_4 = t$
(c) $w = t, x = -t, y = t, z = 0$

14. **(a)** Somente a solução trivial
(b) $u = 7s - 5t, v = -6s + 4t, w = 2s, x = 2t$
(c) Somente a solução trivial

15. **(a)** $I_1 = -1, I_2 = 0, I_3 = 1, I_4 = 2,$
(b) $Z_1 = -s - t, Z_2 = s, Z_3 = -t, Z_4 = 0, Z_5 = t$

16. **(a)** $x = \frac{2}{3}a - \frac{1}{9}b, y = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{9}b$ **(b)** $x_1 = a - \frac{1}{3}c, x_2 = a - \frac{1}{2}b, x_3 = -a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$

17. $a = -4$, nenhuma; $a \neq \pm 4$, exatamente uma; $a = 4$, infinitas

19. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são respostas possíveis.

20. $\alpha = \pi/2, \beta = \pi, \gamma = 0$

22. $\lambda = 4, \lambda = 2$

23. Se $\lambda = 1$, então $x_1 = x_2 = s, x_3 = 0$
Se $\lambda = 2$, então $x_1 = -\frac{1}{2}s, x_2 = 0, x_3 = s$

24. $x = -13/7, y = 91/54, z = -91/8$

25. $a = 1,\ b = -6,\ c = 2,\ d = 10$

26. $a = 1, b = -2, c = -4, d = -29$

30. **(a)** Pelo menos duas das três retas são distintas. **(b)** As três retas são idênticas.

31. **(a)** Falsa **(b)** Verdadeira **(c)** Falsa **(d)** Falsa

32. **(a)** Falsa **(b)** Falsa **(c)** Falsa **(d)** Falsa