

Exercícios selecionados:

1(b,c), 2(b,d), 5, 20, 22, 24, 25, 31(a,b,c,d,e)

OBS:

1) Utilize uma ferramenta computacional para resolver os exercícios 22, 25, 31.

Sugestão: <http://www.geogebra.org/>

2) A notação "ln" que aparece no Exercício 25 é usada para denotar o logaritmo natural. O logaritmo natural é o logaritmo de base "e", onde "e" é um número irracional aproximadamente igual a 2,718281828459045... chamado de número de Euler. Este número "e" também aparece no Exercício 22.

2.17 Exercícios

1. Construir os gráficos das funções de 1º grau. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(a) $y = kx$; se $k = 0, 1, 2, 1/2, -1, -2$

(b) $y = x + b$; se $b = 0, 1, -1$

(c) $y = 1,5x + 2$.

2.  Construir os gráficos das funções quadráticas. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(a) $y = ax^2$, se $a = 1, 1/2, -2$

(b) $y = x^2 + c$, se $c = 0, 1, 1/2, -3$

(c) $y = y_0 + (x - 1)^2$, se $y_0 = 0, 1, -1$

(d) $y = ax^2 + bx + c$, se $a = 1, b = -2, c = 5$.

3. Construir os gráficos das funções polinomiais. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(a) $y = 2 + (x - 1)^3$

(b) $y = x^4$

(c) $y = 2x^2 - 4$.

4. Construir os gráficos das funções racionais. Dar o domínio e o conjunto imagem.

(a) $y = -\frac{2}{(x - 1)^2}$

(b) $y = \frac{1}{x}$

(c) $y = \frac{x - 1}{x + 4}$.

5. A função $f(x)$ é do 1º grau. Escreva a função se

$f(-1) = 2$ e $f(2) = 3$.

$$(g) \quad y = \frac{x^2}{x^2 + 1}, x \geq 0$$

$$(h) \quad y = x^2 - 4, x \leq 0$$

$$(i) \quad y = x^2 - 4, x \geq 0.$$

14. Mostrar que a função $y = f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ coincide com a sua inversa, isto é, $x = f(y)$ ou $f(f(x)) = x$.

15. Dada a função $y = f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ definida para todo x real, demonstrar que a sua inversa é a função $x = g(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ definida para $|y| < 1$.

$$16. \text{ Seja } f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 1 \\ x^2, & \text{se } 1 \leq x \leq 9 \\ 27\sqrt{x}, & \text{se } x > 9. \end{cases}$$

Verifique que f tem uma inversa e encontre $f^{-1}(x)$.

17. Se $f(x)$ e $g(x)$ são periódicas de período T , prove que:

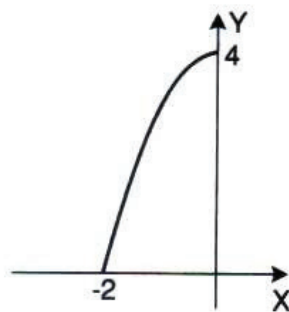
$$(a) \quad h(x) = f(x) + g(x) \text{ tem período } T.$$

$$(b) \quad h(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ é periódica de período } T.$$

$$(c) \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 \quad \forall x \text{ é periódica de período } T.$$

18. Se $f(x)$ é periódica de período T , prove que $3T$ também é período de f .

19. Sabendo que $f(x)$ é uma função par e periódica de período $T = 4$, complete o seu gráfico.



20. Se $f(x) = 2^x$, mostre que

$$f(x+3) - f(x-1) = 15/2 f(x).$$

21. Seja $\phi(x) = 1/2(a^x + a^{-x})$ e $\psi(x) = 1/2(a^x - a^{-x})$.

Demonstrar que

$$\phi(x+y) = \phi(x) \cdot \phi(y) + \psi(x) \cdot \psi(y) \text{ e}$$

$$\psi(x+y) = \phi(x) \cdot \psi(y) + \phi(y) \cdot \psi(x).$$

22.  Construir o gráfico das seguintes funções exponenciais.

(a) $y = a^x$, se $a = 2, 1/2$, e ($e = 2,718 \dots$)

(b) $y = 10^{1/x}$

(c) $y = e^{-x^2}$

(d) $y = -2^x$.

23. Dada $\phi(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$, verifique a igualdade $\phi(a) + \phi(b) = \phi\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$.

24. Sejam $f(x) = \log x$ e $g(x) = x^3$.

Forme as expressões

(a) $f[g(2)]$

(b) $f[g(a)], a > 0$

(c) $g[f(a)], a > 0$.

25.  Construir o gráfico das seguintes funções logarítmicas.

(a) $y = \ln(-x)$

(b) $y = \ln|x|$

(c) $y = \ln(x+1)$

(d) $y = \log_a x$ se $a = 10, 2$ e $1/2$

(e) $y = x \ln x$.

26. Se $f(x) = \arctg x$ prove que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

27. Prove que $\arctg a - \operatorname{arccotg} b = \operatorname{arccotg} b - \arctg a$.

28. Seja $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta$. Verifique a igualdade $f(2\theta) = \frac{2f(\theta)}{1-[f(\theta)]^2}$.

29. Seja $f(x) = \arccos(\log_{10} x)$.

Calcular $f(1/10)$, $f(1)$ e $f(10)$.

30. Determinar o domínio das seguintes funções:

(a) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$

(b) $y = \arcsen(\log_{10} x/10)$

(c) $y = \sqrt{\operatorname{sen} 2x}$.

31.  Construir o gráfico das seguintes funções trigonométricas. Verificar se são periódicas e em caso afirmativo determinar o período.

(a) $y = \operatorname{sen} kx$, $k = 2, 3, 1/2$ e $1/3$

(b) $y = k \cos x$, $k = 2, 3, 1/2, 1/3$ e -1

(c) $y = k \cos 2x$, $k = 2, -1$ e $1/2$

(d) $y = \operatorname{sen}(x - \pi/2)$

(e) $y = \cos(x + \pi/2)$

(f) $y = \operatorname{tg}(x - 3\pi/2)$

(g) $y = \operatorname{cotg}(x + \pi/4)$

(h) $y = \operatorname{tg} \frac{1}{2}x$

(i) $y = 1 + \operatorname{sen} x$

(j) $y = 1 + |\operatorname{sen} 2x|$.

44. Determinar graficamente e algebricamente o equilíbrio do mercado considerando as seguintes funções de demanda e oferta:

$$(a) \begin{cases} Q_d = 10 - 4P \\ Q_s = 6P - 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} Q_d = 4 - P^2 \\ Q_s = 4P - 1 \end{cases}$$

45. Uma caixa sem tampa, na forma de um paralelepípedo, tem um volume de 10 cm^3 . O comprimento da base é o dobro da largura. O material da base custa R\$ 2,00 por m^2 ao passo que o material das laterais custa R\$ 0,02 por m^2 . Expressar o custo total do material em função da largura da base.

46.  Traçar o gráfico das funções trigonométricas. Comparar cada conjunto identificando a transformação ocorrida. Identificar domínio, conjunto imagem, máximos e mínimos, crescimento e decrescimento.

$$(a) f(x) = \sin x, \quad g(x) = 2 \sin x, \quad h(x) = 1/2 \sin x$$

$$(b) f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin 2x, \quad h(x) = \sin (1/2x)$$

$$(c) f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos x + 3, \quad h(x) = \cos x - 3$$

$$(d) f(x) = \cos x, \quad g(x) = \cos (x + 2), \quad h(x) = \cos (x - 2)$$

$$(e) f(x) = \sin x, \quad g(x) = -\sin x$$

47.  Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela, o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:

Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirmar sobre o gráfico de $g(x) = f(x - a)$ quando $a > 0$? E quando $a < 0$?

$$(a) \quad y = x^2 \qquad y = (x - 2)^2 \qquad y = (x - 4)^2$$

$$(b) \quad y = x^2 \qquad y = (x + 2)^2 \qquad y = (x + 4)^2$$

48.  Usando uma ferramenta gráfica, trace numa mesma janela o gráfico das funções dadas em cada item e, a seguir, responda a questão:

Dado o gráfico de $f(x)$, o que se pode afirmar sobre o gráfico de $g(x) = f(x) + a$, quando $a > 0$? E quando $a < 0$?

$$(a) \quad y = x^2 \qquad y = x^2 + 2 \qquad y = x^2 + 4$$

$$(b) \quad y = x^2 \qquad y = x^2 - 2 \qquad y = x^2 - 4$$

49.  Identifique algebricamente as transformações realizadas na parábola “mãe” $f(x) = x^2$, para obter as seguintes funções quadráticas. A seguir trace o gráfico e compare os resultados.

$$(a) f(x) = x^2 - 6x + 9$$

$$(b) f(x) = x^2 + 4x + 4$$

$$(c) f(x) = x^2 - 6x + 5$$

50.  Determine algebricamente a função inversa. A seguir, numa mesma janela, trace o gráfico de cada função, de sua inversa e da função identidade.

$$(a) y = 2x - 1$$

$$(b) y = \frac{x}{2} - 1$$

$$(c) y = x^3$$

$$(d) y = (x - 1)^3 + 4$$

51. Para cada uma das funções, se necessário, restrinja o domínio e o contradomínio e determine a inversa.

$$(a) y = x^2$$

$$(b) y = x^2 - 2x + 1$$

$$(c) y = 2x^2 - 6x - 10$$

$$(d) y = e^x$$