Exercícios selecionados:

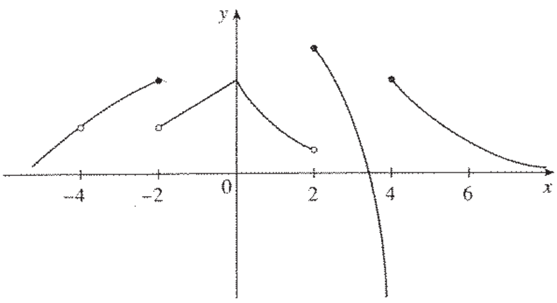
3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 16, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 31, 32, 33, 35

2.5 Exercícios

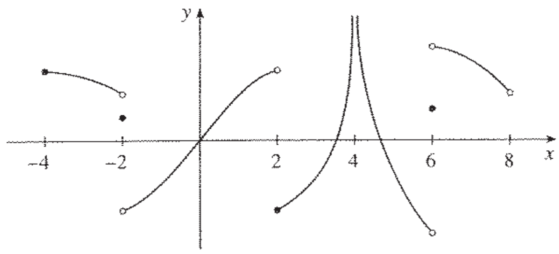
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, estabeleça os números nos quais f é descontínua e explique por quê.
   (b) Para cada um dos números estabelecidos na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, estabeleça os intervalos nos quais g é contínua.



5. Esboce o gráfico de uma função que é contínua em toda a parte, exceto em $x = 3$ e é contínua à esquerda em 3.

6. Esboce o gráfico de uma função que tenha um salto de descontinuidade em $x = 2$ e uma descontinuidade removível em $x = 4$, mas é contínua no restante.

7. Um estacionamento cobra \$ 3 pela primeira hora, ou parte dela, e \$ 2 por hora sucessiva, ou parte, até o máximo de \$ 10.
   (a) Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido.
   (b) Discuta as descontinuidades da função e sua significância para alguém que use o estacionamento.

8. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
   (a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo
   (b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Nova York
   (c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Nova York
   (d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida
   (e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo

9. Se f e g forem funções contínuas, com $f(3) = 5$ e $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encontre $g(3)$.

10–12 □ Use a definição de continuidade e propriedades dos limites para provar que a função é contínua em um dado número.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}$, $a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4$, $a = -1$

12. $g(x) = \dfrac{x+1}{2x^2-1}$, $a = 4$

13–14 □ Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

13. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$, $(2, \infty)$ ≠

14. $g(x) = 2\sqrt{3-x}$, $(-\infty, 3]$

15–20 □ Explique por que a função é descontínua no número dado.

15. $f(x) = \ln|x-2|$ $\quad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ $\quad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$ $\quad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 \text{ se } x = 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ $\quad a = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-12}{x+3} & \text{se } x \neq -3 \\ -5 & \text{se } x = -3 \end{cases}$ $\quad a = -3$

20. $f(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x < 1 \\ 4-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ $\quad a = 1$

21–28 □ Explique, usando os Teoremas da aula , por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Estabeleça o domínio.

21. $F(x)=\dfrac{x}{x^2+5x+6}$

22. $G(x)=\sqrt[3]{x}\left(1+x^3\right)$

23. $R(x)=x^2+\sqrt{2x-1}$

24. $h(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{x+1}$

25. $f(x)=e^t \operatorname{sen} 5x$

26. $F(x)=\operatorname{sen}^{-1}(x^2-1)$

27. $G(t)=\ln(t^4-1)$

28. $H(x)=\cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$

29–30 □ Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

29. $y=\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$

30. $y=\ln(\operatorname{tg}^2 x)$

31–34 □ Use a continuidade para calcular o limite.

31. $\lim\limits_{x\to 4}=\dfrac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$

32. $\lim\limits_{x\to\pi}\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} x)$

33. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2-x}$

34. $\lim\limits_{x\to 2}\operatorname{arctg}=\left(\dfrac{x^2-4}{3x^2-6x}\right)$

35–36 □ Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

35. $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x<1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x\geqslant 1\end{cases}$

36. $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } x<\pi/4 \\ \cos x & \text{se } x\geqslant \pi/4\end{cases}$

37–39 □ Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

37. $f(x)=\begin{cases} 1+x^2 & \text{se } x\leqslant 0 \\ 2-x & \text{se } 0\leqslant x \text{Ñ} \\ (x-2)^2 & \text{se } x>2\end{cases}$

38. $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{se } x\leqslant 1 \\ 1/x & \text{se } 1<x<3 \\ \sqrt{x-3} & \text{se } x\geqslant 3\end{cases}$

39. $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } x\leqslant 0 \\ e^x & \text{se } 0\leqslant x\leqslant 3 \\ 2-x & \text{se } x>1\end{cases}$

40. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r)=\begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r<R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r\geqslant R\end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

41. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x)=\begin{cases} \csc+1 & \text{se } x\leqslant 3 \\ \csc^2-1 & \text{se } x>3\end{cases}$$

42. Encontre a constante c que torna g contínua em $(-\infty, \infty)$.

$$g(x)=\begin{cases} x^2-c^2 & \text{se } x<4 \\ \csc^2+20 & \text{se } x\geqslant 4\end{cases}$$

43. Quais as seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que é igual a f para $x \neq a$ e é contínua em $\mathbb{R}$.

(a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x+2}$, $a=-2$

(b) $f(x)=\dfrac{x-7}{|x-7|}$, $a=7$

(c) $f(x)=\dfrac{x^3+64}{x+4}$, $a=-4$

(d) $f(x)=\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$, $a=9$

44. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0)=1$ e $f(1)=3$. Seja $N=2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicado que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f pode satisfazer a mesma conclusão. (Mesmo que não satisfaça as hipóteses.)

45. Se $f(x)=x^3-x^2+x$, mostre que existe um número c tal que $f(c)=10$.

46. Use o Teorema do Valor Intermediário para provar que existe um número c positivo tal que seu quadrado é igual a $c^2=2$. (Isso prova a existência do número $\sqrt{2}$.)

47–50 □ Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

47. $x^4+x-3=0$, $(1, 2)$

48. $\sqrt[3]{x}=1-x$, $(0, 1)$

49. $\cos x=x$, $(0, 1)$

50. $\ln x=e^{-x}$, $(1, 2)$

51–52 □ (a) Prove que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use sua calculadora para encontrar o intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

51. $e^x=2-x$

52. $x^5-x^2+2x+3=0$

53–54 □ (a) Prove que a equação tem pelo menos uma raiz real. (b) Use recursos gráficos para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

53. $x^5-x^2-4=0$

54. $\sqrt{x-5}=\dfrac{1}{x+3}$

55. Prove que f é contínua em a se e somente se

$$\lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

56. Para provar que seno é contínuo, precisamos mostrar que $\lim_{x\to a}\operatorname{sen} x=\operatorname{sen} a$ para todo número real a. Pelo Exercício 55 uma afirmativa equivalente é que